CÁLCULO FRACIONAL LOCAL E ÁLGEBRAS DEFORMADAS INSPIRADAS NA MECÂNICA ESTATÍSTICA NÃO EXTENSIVA: POSSÍVEIS CONEXÕES

Jonathan dos Santos Passos[1] & José Weberszpil[2]

1. Bolsista PIBIC, Discente do Curso de Matemática UFRRJ; 2. Professor do DTL/UFRRJ.

Palavras-chave: Cálculo Fracional Local; Álgebras Deformadas.

Introdução

Na presente contribuição estudamos aspectos do cálculo fracionário local e suas possíveis conexões às álgebras deformadas inspiradas na mecânica estatística não-extensiva. Com foco na modelagem da dinâmica de sistemas complexos, pudemos mostrar que de fato tal conexão é possível.

O conceito de derivadas e integrais de ordem fracional (Podlubny, 1999; Weberszpil, 2014) remonta ao início da teoria do cálculo diferencial. No entanto, nos últimos anos têm sido observado um desenvolvimento mais acentuado, em face da complexidade acrescida desta teoria para a sua aplicação em diversas áreas da ciência.

No entanto, a definição de derivada fracionária de Riemann-Liouville (RL) difere em alguns aspectos da derivada usual de ordem inteira e a definição de Caputo (Podlubny, 1999) trata apenas com funções contínuas diferenciáveis; ambas são operadores não locais. Neste sentido, nem a derivada fracionária de RL nem a de Caputo podem ser utilizadas para se fazer a análise local de funções contínuas não-diferenciáveis (FCND). Uma característica intrínseca das FCND é o fato de que uma função contínua pode ser suficientemente irregular de forma que seu gráfico seja fractal. Ao que parece, muitos fenômenos naturais apresentam uma certa fractalidade para na sua dinâmica.

Com o interesse de se investigar propriedades locais de FCND utilizando as derivadas fracionárias, faz-se necessária uma modificação adequada desta definição de derivada fracionária para que as propriedades algébricas possam ser mais adequadas. Isso dá justificativa à criação de um cálculo fracionário local (CFL) (Balankin, Kolwankar and Gangal, 1996), com derivadas fracionais locais.

Em uma abordagem aparentemente diferente dessa abordagem do CFL, a análise de estruturas algébricas deformadas têm crescido muito, em consequência da sua relação com grupos quânticos. Seu desenvolvimento trouxe a necessidade da generalização de algumas funções especiais para lidar adequadamente com fenômenos não lineares. As deformações algébricas inspiradas na mecânica estatística não extensiva, propostas por N. Kalogeropoulos, em 2005, G. Kaniadakis, em 2002, L. Nivanen, em 2003 e E. P. Borges, em 2004, tem motivado diversos autores a reverem a definição usual de soma e de multiplicação e buscarem uma generalização de estruturas algébricas para expressar alguns problemas de natureza física mais naturalmente.

Metodologia

Para atingirmos nosso objetivo de mostrar a conexão de formalismos, estudamos as principais definições e propriedades do CF usual através das definições de RL e de Caputo, do CFL e do q-cálculo inspirado na mecânica estatística não extensiva (MENE).

A derivada de Hausdorff difere da derivada fracionária padrão e é de natureza local. Definimos a derivada Hausdorff de uma função, $g(t)$, como:

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t^{\alpha}}=\lim_{t'\to t}\frac{g(t)-g(t')}{t^{\alpha}-t'^{\alpha}}=\frac{\partial g(\hat{t})}{\partial \hat{t}} \quad .$$

No contexto de MENE e das álgebras q-deformadas temos a q-derivada de Borges definida por:

$$D_{(q)} f(x) \equiv \lim_{y \to x} \frac{f(x)-f(y)}{x \ominus_q y} = [1+(1-q)x] \frac{df(x)}{dx} \quad .$$

A conexão entre CFL e álgebras deformadas pode ser feita por meio de uma expansão binomial:

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad .$$

A partir dessa expansão com expoente fracional $(1-\zeta)$, obtemos em primeira ordem:

$1-q=\frac{(1-\zeta)}{l_0}$, onde ζ é um parâmetro de fractalidade característico do sistema.

Podemos observar que, se $q \to 1 \Rightarrow \zeta \to 1$; se $q \to 0$,que $\zeta \to 1$; e se $l_0 \to \infty \Rightarrow q \to 1$. Assim podemos concluir que a q -derivada deformada é a expansão de primeira ordem da derivada Hausdorff e que existe conexão entre os formalismos por meio de uma métrica fractal.

Resultados e Discussão

Para atingirmos nossos objetivos, estudamos as principais definições e propriedades do CF usual, através das definições de Riemann-Liouville e de Caputo. Os operadores de derivadas fracionais usuais são operadores não locais, inadequados para analisar localmente FCND. Sendo assim, o uso de operadores locais de CFL e da q-derivada, que vem sendo usada com sucesso para a descrição da dinâmica de sistemas complexos, parece mais adequado.
O CFL tem características vantajosas, pois preserva propriedades operacionais semelhantes ao cálculo de ordem inteira.

Conclusão

Nesta contribuição mostramos que a conexão entre CF e as álgebras q-deformadas inspiradas na MENE é possível. Tais conexões abrem a possibilidade de futuras investigações em diversos sistemas dinâmicos complexos.
Este trabalho demonstra ainda que projetos de Iniciação Científica são de grande importância para estimular a vida acadêmica e fornecem a oportunidade de aguçar a curiosidade intelectual, estimulando a continuidade de estudos em nível de pós-graduação.

Referências Bibliográficas

BALANKIN, A.S. ESPINOZA, B., Hydrodynamics of fractal continuum flow, Phys. Rev. E 85 (2012) 025302(R).

KOLWNKAR, K. M. and GANGAL, A. D. 1996. Fractional differentiability of nowhere differentiable functions and dimensions. Chaos, 6:505-523.

BALANKIN, A. S. Toward the mechanics of fractal materials: mechanics of continuum with fractal metric. ArXiv:1409.5829 [cond-mat.mtrl-sci].

BORGES, E. P. Manifestacões Dinâmicas e Termodinâmicas de Sistemas Não-Extensivos, Tese de Doutorado, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro (2004).

BORGES, E. P. A possible deformed algebra and calculus inspired in nonextensive thermostatistics, Physica. A, Holanda, v. 340, p. 95-101, (2004).

PODLUBNY, I. Fractional Differential Equations, Mathematics in Science and Engineering, Vol. 198, Academic Press, San Diego, (1999).

WEBERSZPIL, J., O cálculo Fracional ou de Ordem Não Inteira: Motivações e Aplicações, Revista Tempo Brasileiro-Tb 195, 26-39, (2014).

WEBERSZPIL, J., On a connection between a class of q-deformed algebras and the Hausdorff derivative in a medium with fractal metric, Physica A 436 (2015) 399–404.