Aplicação do Método de Mapeamento entre equações, as equações médias de Navier-Stokes, com uma análise qualitativa sobre a Turbulência.

Thiago Alves de Souza [1] ; Marcos Cardoso Rodriguez [2]

[1] discente do curso de Engenharia Química (UFRRJ-IT); [2] Docente do Curso de Física (UFRRJ-ICE).

Palavras- chave: Navier-Stokes, escoamento de fluidos viscosos, turbulência.

Introdução

Sabemos que a tarefa de um método numérico é resolver uma ou mais equações diferenciais substituindo as derivadas existentes por expressões algébricas que envolvem a função incógnita. Quando não é possível a solução analítica, e decidimos fazer uma aproximação numérica da equação diferencial, aceitamos ter a solução para um número discreto de pontos mais perto da solução exata será a nossa solução aproximada (ou numérica). Um método analítico com habilidade de resolver tais equações nos daria uma solução fechada, e seria possível então obter os valores das variáveis dependentes em nível infinitesimal, isto é, para um número infinito de pontos. É fácil entender então que, se decidirmos calcular N valores de variáveis no domínio, teremos N incógnitas,sendo necessária um enorme esforço computacional,nosso objetivo é diminuir esse número de equações,diminuindo tal esforço computacional. O método visa obter soluções particulares suficientes amplas para contemplar as condições restritas do problema, mas ele ainda carece de um roteiro, ou estratégia pratica de aplicação. As etapas e descrições de algumas formas analíticas para a manipulação de EDP's veremos mais adiante.

Metodologia

As tentativas de solucionar os sistemas de equações diferenciais que descrevem problemas da área de fenômenos de transporte costumam seguir a seguinte ordem de execução:
a) Obter uma solução geral para o problema;
b) Particularizar a solução através de condições de contorno, ou condições iniciais;

Faremos uma mudança de variável nas equações médias de Navier-Stokes bidimensionais, usualmente para tratar escoamentos turbulentos via métodos numéricos. Nessa solução a função corrente é composta por duas parcelas, sendo que a primeira é uma função arbitrária g(x,y,t) cujo o argumento será uma única variável auxiliar:

$$h = e^{c_0 + c_1 x + c_2 y + \upsilon(c_1^2 + c_2^2)t}$$

$$\frac{d\overline{u}}{dh}\left(c_1\overline{u} + c_2\overline{\mathrm{v}} + \upsilon\left(c_1^2 + c_2^2\right)\right) = -\frac{c_1}{\rho}\frac{d\overline{p}}{dh} + \upsilon\left(c_1^2 + c_2^2\right)\left(h\frac{d^2\overline{u}}{dh^2} + \frac{d\overline{u}}{dh}\right) + c_2\frac{d\overline{u'\mathrm{v}'}}{dh}$$

$$\frac{d\overline{u}}{dh}\left(c_1\overline{u} + c_2\overline{\mathrm{v}} + \upsilon\left(c_1^2 + c_2^2\right)\right) = -\frac{c_2}{\rho}\frac{d\overline{p}}{dh} + \upsilon\left(c_1^2 + c_2^2\right)\left(h\frac{d^2\overline{u}}{dh^2} + \frac{d\overline{u}}{dh}\right) + c_1\frac{d\overline{u'\mathrm{v}'}}{dh}$$

$$c_1\frac{d\overline{u}}{dh} + c_2\frac{d\overline{\mathrm{v}}}{dh} = 0 \qquad \text{e} \qquad c_1\frac{du'}{dh} + c_2\frac{d\mathrm{v}'}{dh} = 0$$

Multiplicando a equação (1) por c1 e (2) por c2 e somando-as,obtemos:

$$\overbrace{\left(c_1\frac{d\overline{u}}{dh}+c_2\frac{d\overline{\mathrm{v}}}{dh}\right)}^{\boxed{Continuidade=0}}\left(c_1\overline{u}+c_2\overline{\mathrm{v}}+\upsilon\left(c_1^{\,2}+c_2^{\,2}\right)\right)=$$

$$-\frac{\left(c_1^{\,2}+c_2^{\,2}\right)}{\rho}\frac{d\overline{p}}{dh}+\upsilon\left(c_1^{\,2}+c_2^{\,2}\right)\left(\underbrace{c_1h\frac{d^2\overline{u}}{dh^2}+c_2h\frac{d^2\overline{\mathrm{v}}}{dh^2}}_{\boxed{h(\frac{d}{dh}Continuidade)=0}}+\underbrace{c_1\frac{d\overline{u}}{dh}+c_2\frac{d\overline{\mathrm{v}}}{dh}}_{\boxed{Continuidade=0}}\right)+2c_1c_2\left(\frac{du'}{dh}\right.$$

Após retirarmos todos os termos nulos, obtém-se:

$$\frac{\left(c_1^{\,2}+c_2^{\,2}\right)}{\rho}\frac{d\overline{p}}{dh}=2c_1c_2\left(\frac{d\overline{u'\mathrm{v}'}}{dh}\right)$$

Resultados e Discussão

A qual demonstra que os termos flutuantes do escoamento podem ser escritos como uma função da pressão média do escoamento, pertencendo portanto ao espaço nulo do operador rotacional, visto que as equações de Navier_Stokes só possuem solução analítica para escoamento laminar. As soluções obtidas para equações de Navier-Stokes possuem formato válido, sendo capazes de contemplar as componentes flutuantes típicos de modelo de turbulência.Nosso objetivo vai ser melhorar tais resultados,aumentando uma visão na análise qualitativa da turbulência e com isso melhorando a aplicação de cálculos numéricos, diminuído o seu esforço computacional.

Conclusão

Mostra-se ao longo desse trabalho que as perturbações geradoras de turbulência podem ser obtidas por uma interpretação fisicamente realista dos fenômenos que ocorrem na interface entre o corpo submerso e o fluido. Ao associar-se está interpretação a aplicação do método as equações médias de Navier-Stokes, obtém-se simulações qualitativamente realistas do escoamento viscoso. Nosso objetivo agora é levar esses resultados ainda mais realistas pelo corpo submerso sobre o escoamento, com o desafio de não sacrificar a rapidez e praticidade do uso de tal método e aplicar a métodos numéricos como Volumes finitos.

Referências Bibliográficas

Beck,D, 2005 ‘’ **Soluções exatas para a equação de Helmohotz bidimendional em regime transiente”,** dissertação de mestrado-PROMEC-UFRGS.

Bluman G.;Kumei S. 1989 “ **Symmetries and differential equations**”, Springer Verlag, NY.

Figueiredo, D.G.; 1963 “ **Teoria Clássica do Potencial** “, editora Universidade de Brasilia.

Landau, L.D. Lifshitz, E.M.,1987 “**Fluids Mechanics “**, 2º edição (vol. 6), Pergamon-NY.

Zwillinger,D.,1992 “ **Handbook of Differential equations**”, academic press-Boston.