Eletrodinâmica na presença de uma escala de comprimento mínimo.

Apóllo Vitalino da Silva[1] & Mario Junior de Oliveira Neves[2]

1. Bolsista PIBIC, Discente do Curso de Licenciatura em Física, ICE/UFRJ; 2. Professor do DEFIS/ICE/UFRRJ.

Palavras-chave: eletromagnetismo, escala de comprimento mínimo e teoria de campos.

Introdução

O Projeto tem como objetivo uma compreensão por possíveis extensões do eletromagnetismo. Estas extensões, vistas como teorias efetivas do eletromagnetismo, têm sido estudadas mais recentemente no âmbito da pesquisa em física teórica. Particularmente, a motivação é estudar a eletrodinâmica na presença de uma escala de comprimento, e como este assunto é bastante amplo, nosso foco aqui será estudar as consequências desta escala na interação eletromagnética.

Existem muitas maneiras de se introduzir uma escala de comprimento em física teórica. A mais conhecida na literatura é por meio da não comutatividade das coordenadas do espaço-tempo. No caso que consideraremos, a escala de comprimento é introduzida diretamente na relação de incerteza de Heisenberg

$$\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}\left[1+\left(\frac{l}{\hbar}\right)^2 (\Delta P)^2\right], \tag{1}$$

onde ℓ é um parâmetro com dimensão de comprimento. A motivação para essa introdução vem do consenso de que numa escala de gravitação quântica as medidas de posição e momento devem depender de uma nova escala de comprimento, em que o candidato para essa escala seja o comprimento de Planck (ℓ~ $10^{-33} cm$). Nesta escala, a teoria quântica de campos atual não é suficiente para descrever as interações fundamentais da Natureza, e necessita-se então de uma nova teoria de campos.

Devido a esta escala de comprimento, a primeira mudança encontrada é na própria mecânica quântica, no qual o operador de momento fica da seguinte forma:

$$P_\mu = -i\hbar \nabla_\mu , \tag{2}$$

onde o operador nabla é definido por:

$$\nabla_\mu = e^{l^2 \Box} \partial_\mu , \tag{3}$$

onde ℓ é o mesmo parâmetro com dimensão de comprimento citado acima, e $\partial^2 = \partial_\mu \partial^\mu$.

No limite ℓ → 0, o operador usual de momento da Mecânica Quântica é obtido

$$P_\mu = -i\hbar \partial_\mu . \tag{4}$$

As equações de Maxwell do eletromagnetismo, nesse contexto, são propostas na seguinte forma:

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\mu \quad \text{e} \quad \nabla_\mu F_{\nu\rho} + \nabla_\nu F_{\rho\mu} + \nabla_\rho F_{\mu\nu} = 0 \ . \tag{5}$$

Metodologia

A metodologia de pesquisa, primeiramente, é fazer um estudo clássico do eletromagnetismo de Maxwell na presença da escala de comprimento citada acima. O problema fundamental do eletromagnetismo é entender como as partículas carregadas interagem entre si. Nossa tarefa é compreender tal interação, de acordo com as equações de Maxwell anteriores. Por ser uma tarefa difícil no caso dinâmico, começaremos mostrando os resultados do caso estático. Nesse caso, obteremos a Lei de Força Coulombiana sob influência da escala de comprimento. Com isso, a equação da eletrostática com uma distribuição estática de cargas é dada por:

$$e^{-l^2 \Box^2} \nabla^2 \Phi = \rho / \epsilon_0. \tag{6}$$

Nosso problema eletrostático é então resolver a equação (6).
Para solucionar esta equação diferencial parcial de ordem infinita, usaremos o método da função de Green, e das transformadas de Fourier espaciais. Como sabemos da teoria eletrostática usual, se conhecemos a expressão do potencial eletrostático é possível obter a expressão da força eletrostática entre distribuições de carga.

No caso da eletrodinâmica clássica, a propagação dos campos elétrico e magnético vem da solução das equações de Maxwell (5). Também usaremos o método dos potenciais dinâmicos, juntamente com a função de Green, e as integrais de Fourier.

Resultados e Discussão

O potencial eletrostático, que é a solução da equação de Poisson (6) para uma carga pontual é:

$$\Phi(r) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r} erf\left(\frac{r}{2l}\right), \tag{7}$$

onde e*rf* é uma função especial, conhecida como a função erro. No entanto, para a interação entre duas cargas pontuais, a força eletrostática é dada por:

$$F(r) = \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 r^2}\left[erf\left(\frac{r}{2l}\right) - \frac{r}{2l\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{r}{2l}\right)^2}\right]\hat{r}. \tag{8}$$

No limite em que $\ell \to 0$, obtemos as expressões conhecidas da eletrostática e, no limite em que $l \gg r$ obtemos que $F \to 0$. Entretanto, no limite em que $l \gg r,$ o potencial é finito, e é dado por:

$$\Phi_0 = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{l\sqrt{\pi}}. \tag{9}$$

Conclusão

Quando a distância aumenta, o modulo da força aumenta até atingir um ponto de equilíbrio, e após este, vai a zero para grandes distâncias. Esse comportamento pode ser interessante numa aplicação para as interações fortes, e portanto, ajudar a entender a interação de confinamento dos quarks.

Referências Bibliográficas

MOAYEDI, S.K. , SETARE, M.R. and KHOSROPOUR, B. , Advances in High Energy Physics Volume 2013 (2013), Article ID 657870.

GRIFFITHS, DAVID J. **Eletrodinâmica**. 3. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2011.

JACKSON, J. D. **Classical Electrodynamics**. 3. ed. New York: Wiley, 1999.